Contents

STUDIE FOURIER ANALYSE .

Door: Jan Spaenjers

1 Waar gaat het over?

Fourier analyse zegt dat gelijk welk signaal bij benadering kan samengesteld worden uit een reeks van Sinus en/of Cosinus signalen. Al deze signalen zijn harmonischen van de grondtoon maar hebben een verschillende amplitude. Een voorwaarde echter is dat het signaal repetitief moet zijn, met andere woorden dat het een periode heeft. Dit signaal kan digitaal gesampeld worden. Het aantal samples voor een periode is een integer getal n. Het is de bedoeling om uit de gesampelde waarden de verschillende amplitudes te vinden van de verschillende harmonischen Het is deze gedachtegang die ik het in dit artikel wil belichten.

2 Een signaal uitsluitend opgebouwd uit sinussen

Veronderstel dat een signaal y is samengesteld uit 3 frekwenties namelijk a_1 = 1000Hz, a_2 = 2000Hz en a_3 = 3000Hz met respectievelijk de volgende amplitudes A_1 = 20V, A_2 = 10V en A_3 = 5V. Dit signaal y is de som van deze drie signalen $A_1.\sin(2\pi ft) + A_2.\sin(2 \times 2\pi ft) + A_3.\sin(3 \times 2\pi ft)$. De volgende beperkingen zijn opgelegd:

1° - Er is geen faze-verschuiving tussen de verschillende signalen.

2° - Er is geen DC-Offset, of met andere woorden, alle frekwenties slingeren rond OV.

a_1,a_2 en a_3 zijn dus niets anders dan een serie tonen met als grondtoon f1 = 1000 Hz, en zijn 2° harmonische f2 = 2000 Hz of 2 x f1, en zijn 3° harmonische f3 = 3000 Hz of 3 x f1.

Wanneer we deze 3 frekwenties tekenen, zoals in Fig1 te zien is en deze met elkaar optellen bekomen we Fig2.

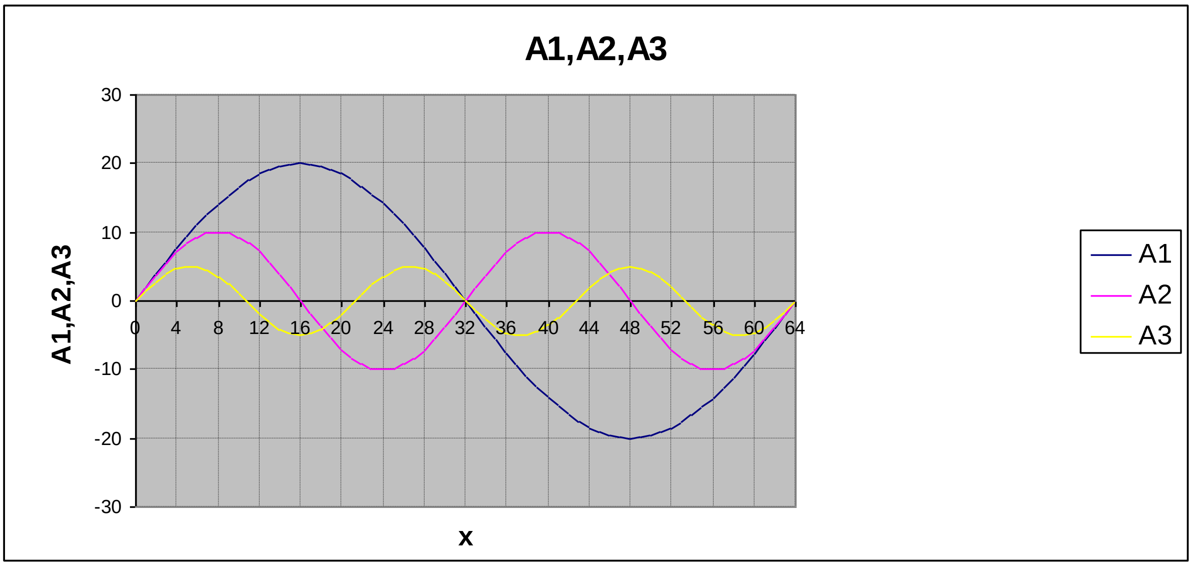

FIG1

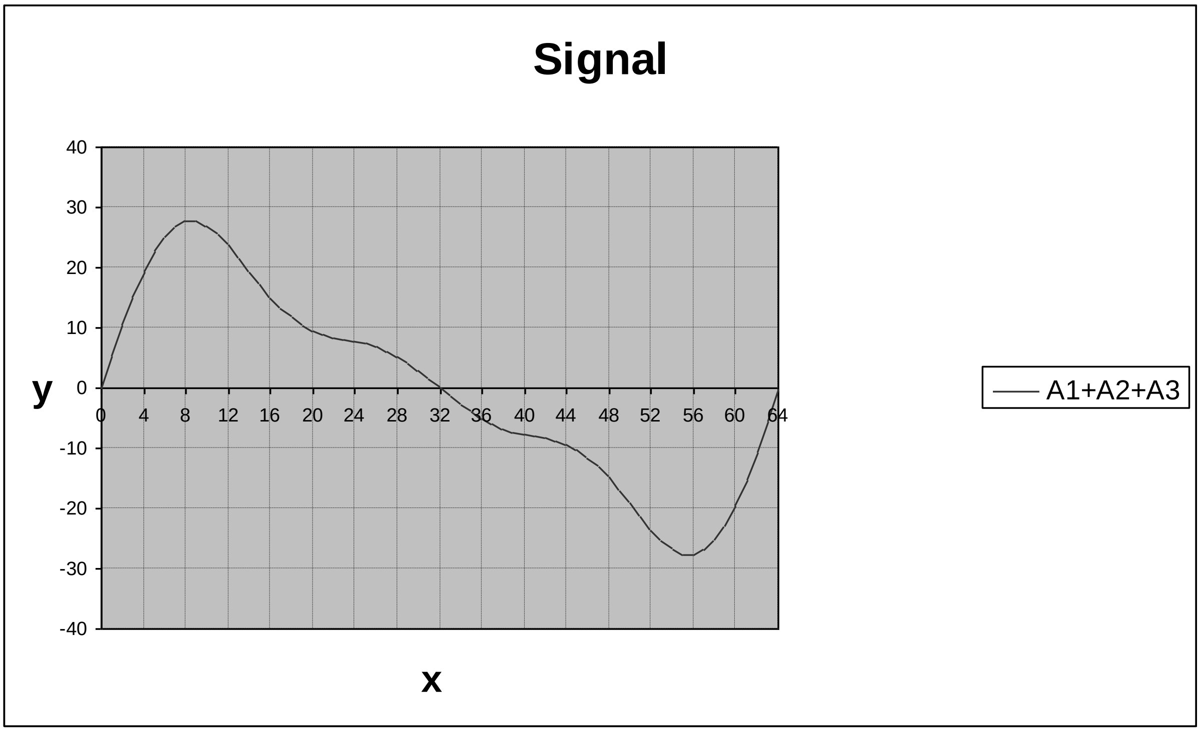

Fig2

Veronderstel dat ik dit signaal aflees of bereken iedere 8 tijds intervallen, dan bekom ik dus een waarde op tijdstip 8 welke gelijk is aan

y_1 = 27,675 V ,

zoook op tijdsstip 16 de waarde

y_2 = 15 V

en op tijdsstip 24 de waarde

y_3 = 7,675 V.

Merk op dat de volgende samples de waarden 0 V , -7,675 V , - 15 V en -27,675 V hebben op de tijdstippen 32,40,48,56 en in feite niets anders zijn dan de tegenovergestelde waarden van de vorige halve periode.

Noteer dat een periode is gelijk aan 1/1000 Hz = 1 ms en dus een sample afstand is dan 1ms/8 = 125 µs.

Als $2\pi = 1/f_1$ dan is $2\pi/8 = 1/(8.f_1)$
Vermits $f_2 = 2.f_1$ zal dus ook $2\pi/8 = 2.1/(8.f_2)$

We kennen dus alleen maar de waarden y_1, y_2 en y_3 maar niet de amplitudes van A_1, A_2 en A_3 van de frekwenties *1000Hz, 2000Hz en 3000Hz*. Omdat de periode gelijk was aan *8 x 125µsec = 1 ms* weet ik dat de grondtoon of de eerste harmonische gelijk is aan 1/*1ms = 1000Hz.*
We kunnen dus schrijven voor de waarden y_1, y_2 en y_3 dat

$y_1 = a_1 + b_1 + c_1$
$y_2 = a_2 + b_2 + c_2$
$y_3 = a_3 + b_3 + c_3$

Vermits we weten dat a_1 de waarde is van f_1=*1000Hz* met amplitude A_1, en op tijdsstip
x = 1°sample x1 = 2 π/8 kunnen we a_1 schrijven als

$$a_1 = A_1.\sin(\pi.1/4) = A_1.0.707$$

Vermits we weten dat b_1 de waarde is van f_2=*2000Hz* met amplitude A_2, en op tijdsstip
x = 1°sample x1 = 2 π/8 kunnen we a_1 schrijven als

$$b_1 = A_2.\sin(2\pi.1/4) = A_1.1$$

(noteer de 2 in *(2.π.1/4)* vermits we te doen hebben met $f_2 = 2.f_1$ zoals hiervoor is uitgelegd!)

Vermits we weten dat c_1 de waarde is van f_3=*3000Hz* met amplitude A_3, en op tijdsstip
x = 1°sample x1 = 2 π/8 kunnen we c_1 schrijven als

$$c_1 = A_3.\sin(3\pi.1/4) = A_1.0.707$$

Vermits y_1 = *27,675* kunnen we schrijven:

$$27.675 = A_1.0.707 + A_2.1 + A_3.0.707 \qquad (1)$$

Op gelijkaardige wijze bepalen we de punten a_2, b_2 en c_2

Nu zien we dat $a_2 = A_1 \sin(\pi.2/4) = A_1.1$
Zoook $b_2 = A_2.\sin(2.\pi.2/4) = A_2.0$
En $c_2 = A_3.\sin(3.\pi.2/4) = A_3.(-1)$

Vermits $y_2 = 15$ kunnen we schrijven:
$15 = A_1.1 + A_2.0 + A_3.(-1)$ (2)

Op gelijkaardige wijze bepalen we de punten a_3, b_3 en c_3

Nu zien we dat
a3 = A1 sin (π.3/4) = A1.0,707
Zoook
b3 = A2.sin (2.π.3/4) = A2.(-1)
En
$c_3 = A_3.\sin(3.\pi.3/4) = A_3.0,707$

Vermits y_3 = *7,675* kunnen we schrijven:
$7,675 = A_1.0,707 + A_2.(-1) + A_3.\ 0,707$ (3)

Samengevat en in matrixvorm bekomen we:

$A_1.0,707 \quad + A_2.1 \quad + A_3.\ 0,707 \quad = 27,675 \quad (1)$
$A_1.1 \quad + A_2.0 \quad + A_3.\ (-1) \quad = 15 \quad (2)$
$A_1.0,707 \quad + A_2.(-1) \quad + A_3.\ 0,707 \quad =7,675 \quad (3)$

Dit zijn drie vergelijkingen met drie onbekenden en dus met de gewone regel van Cramer op te lossen en dit geeft als resultaat
$A_1 = 20V$, $A_2 = 10$ V en $A_3 = 5$ V.
En dit is dus de oplossing van ons probleem, namelijk we hebben van ons signaal drie metingen genomen (*27,675; 15; 7,675*) en we besluiten dat dit signaal samengesteld is uit 3 sinus-signalen (de grondtoon of 1ste harmonische, de 2de en de 3de harmonische) waarvan de amplitudes respectievelijk *20V,10V* en *5V* zijn.

Schrijven we onze 3 vergelijkingen nogmaals op maar dan in een algemenere vorm als:
$y_1 = A_1.\sin\ (\pi.1/4) \quad + A_2.\sin\ (2.\pi.1/4) \quad + A_3.\sin\ (3.\pi.1/4) \quad (1)$
$y_2 = A_1 \sin (\pi.2/4) \quad + A_2.\sin\ (2.\pi.2/4) \quad + A_3.\sin\ (3.\pi.2/4) \quad (2)$
$y_3 = A_1 \sin (\pi.3/4) \quad + A_2.\sin\ (2.\pi.3/4) \quad + A_3.\sin\ (3.\pi.3/4) \quad (3)$

dan kan dit voor *n* vergelijkingen algemeen neergeschreven worden, (met $N = samples/2$) als

$y_n = A_1 \sin (\pi.n/N) \quad + A_2.\sin\ (2.\pi.n/N) \quad + A_3.\sin\ (3.\pi.n/N)$
of nog algemener:

$$y_n = \sum_{k=1}^{N-1} A_k.\sin(k.\pi.n/N)$$

En dit is precies de formule uit de Fourier analyse, op voorwaarde dat het signaal was opgebouwd uit alleen sinussen, en zonder DC-offset. Maar eens men dit hier begrepen heeft is het eenvoudig om te begrijpen dat ook nog een A_0 term er voor komt die de DC-Offset bepaald en een serie cos (k.π.n/N) voor ingeval het signaal ook opgebouwd is uit signalen die 90° in faze verschoven zijn.

Merk op dat een hele reeks even sinussen tot een driehoek leiden, terwijl een serie oneven cosinussen tot een blokvorm leiden.

Men ziet ook dat om een signaal te analyzeren tot en met zijn derde harmonische men de periode in 8 samples moet indelen en 3 samples hiervan nemen om de amplitude te berekenen, zook voor een signaal tot zijn 5° harmonische te bepalen moet men de periode in 12 samples indelen vermits 12/2 - 1 = 5 enz...

3 Signaal opgebouwd uit sinus, cosinus en DC

Fourier beweert echter dat in het algemeen ieder signaal is samengesteld uit een reeks sinussen (elk met een afzondelijke amplitude) plus een reeks cosinussen (ook elk met een afzonderlijke amplitude) en een offset signaal A_0. Dit offset (in de electronica een DC-offset genoemd) is gelijk aan het gemiddelde van het signaal genomen over een periode.
Dit betekent dat indien we een willekeurig signaal willen analyzeren dat onze samples eruit zien als volgt;

$y1 = A1.\sin (\pi.1/3) + A2.\sin (2.\pi.1/3)+ A3.\sin\ (3.\pi.1/3) + B1.\cos\ (\pi.1/3)+ B2.\cos\ (2.\pi.1/3)+ B3.\cos\ (3.\pi.1/3) + A_0 \quad (1)$
$y2 = A1 \sin (\pi.2/3) + A2.\sin (2.\pi.2/3)+ A3.\sin\ (3.\pi.2/3) + B1.\cos\ (\pi.2/3)+ B2.\cos (2.\pi.2/3)+ B3.\cos\ (3.\pi.2/3) + A_0 \quad (2)$

$y3 = A1 \sin(\pi.3/3) + A2.\sin(2.\pi.3/3)+ A3.\sin(3.\pi.3/3) + B1.\cos(\pi.3/3)+ B2.\cos(2.\pi.3/3)+ B3.\cos(3.\pi.3/3) + A_0$ (3)

We zien echter dat we nu 7 onbekenden hebben in plaats van 3, namelijk: A_0, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3. Dit betekent dat we vooreerst op de een of andere manier A_0 moeten uitrekenen zodat we de vergelijkingen kunnen schrijven als;

$y1- A_0 = A1.\sin(\pi.1/3) + A2.\sin(2.\pi.1/3)+ A3.\sin(3.\pi.1/3) + B1.\cos(\pi.1/3+ B2.\cos(2.\pi.1/3)+ B3.\cos(3.\pi.1/3)$ (1)
$y2- A_0 = A1 \sin(\pi.2/3) + A2.\sin(2.\pi.2/3)+ A3.\sin(3.\pi.2/3) + B1.\cos(\pi.2/3)+ B2.\cos(2.\pi.2/3)+ B3.\cos(3.\pi.2/3)$ (2)
$y3- A_0 = A1 \sin(\pi.3/3) + A2.\sin(2.\pi.3/3)+ A3.\sin(3.\pi.3/3) + B1.\cos(\pi.3/3)+ B2.\cos(2.\pi.3/3)+ B3.\cos(3.\pi.3/3)$ (3)

Maar ook dat we het aantal vergelijkingen moeten uitbreiden tot 6, immmers indien we 6 vergelijkingen hebben met 6 onbekenden kunnen we de vergelijkingen oplossen.
Dit is echter geen probleem, vermits we de curve kennen, en deze nu niet meer symmetrisch is kunnen we ze evengoed de andere y4, y5, y6 waarden invullen op dezelfde manier als hierboven, of ;

$Y4- A_0 = A1.\sin(\pi.4/3) + A2.\sin(2.\pi.4/3)+ A3.\sin(3.\pi.4/3) + B1.\cos(\pi.4/3)+ B2.\cos(2.\pi.4/3)+ B3.\cos(3.\pi.4/3)$ (4)
$Y5- A_0 = A1 \sin(\pi.5/3) + A2.\sin(2.\pi.5/3)+ A3.\sin(3.\pi.5/3) + B1.\cos(\pi.5/3)+ B2.\cos(2.\pi.5/3)+ B3.\cos(3.\pi.5/3)$ (5)
$Y6- A_0 = A1 \sin(\pi.6/3) + A2.\sin(2.\pi.6/3)+ A3.\sin(3.\pi.6/3) + B1.\cos(\pi.6/3)+ B2.\cos(2.\pi.6/3)+ B3.\cos(3.\pi.6/3)$ (6)

We krijgen dan een oplossing voor $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ (en A_0 berekenen we afzonderlijk).

Laten we dit eens toepassen op ons circuit.
We weten dat de spanning over de condesator $V_c = 1/C\omega\ [I_{dc}.\Phi + I_o(\cos(\Phi-\varphi) - \cos(\varphi))]$
Vermits $I_o = I_{dc} / \sin(\varphi)$ kunnen we dit ook schrijven als;

$V_c .C\omega / I_{dc} = \Phi + [(\cos(\Phi-\phi) - \cos(\phi)] / \sin(\phi)$ (1)
Dit is een uitdrukking die nog kan vereenvoudigd worden wetende dat

$\cos(\Phi-\phi) = \cos(\Phi)\cos(\phi) + \sin(\Phi)\sin(\phi)$ zodat (1) wordt
$V_c .C\omega / I_{dc} = \Phi + [\cos(\Phi)\cos(\phi) + \sin(\Phi)\sin(\phi)- \cos(\phi) / \sin(\phi)]$ of nog

$V_c .C\omega / I_{dc} = \Phi + \cos(\Phi)\mathrm{cotg}(\phi) + \sin(\Phi) - \mathrm{cotg}(\phi)$ en met $\phi = 32.4816°$ wordt
$\mathrm{cotg}(\phi) = 1.5708$ en
$V_c .C\omega / I_{dc} = \Phi + 1.5708.\cos(\Phi) + \sin(\Phi) - 1.5708$
Dit kan nog eenvoudiger mits men weet dat
$A.\cos(\Phi) + B.\sin(\Phi) = C.\cos(\Phi-\alpha)$

Met $C = \sqrt{A^2 + B^2}$
en
$\alpha = tg^{-1} B/A$
volgt dat
$C = \sqrt{1.5708^2 + 1^2} = 1.862$
en
$\alpha = tg^{-1}\ 1/1.5708 = 0.5669$ *rad ofwel* $32.4816°$
en dus
$V_c .C\omega / I_{dc} = \Phi + 1.862.\cos(\Phi-0.5669) - 1.5708$
Noemen we $V_c .C\omega / I_{dc} = y$ dan zien we een uitdrukking voor onze functie;
$y = \Phi + 1.862.\cos(\Phi-0.5669) - 1.5708$

Deze curve is afgebeeld in volgende figuur.

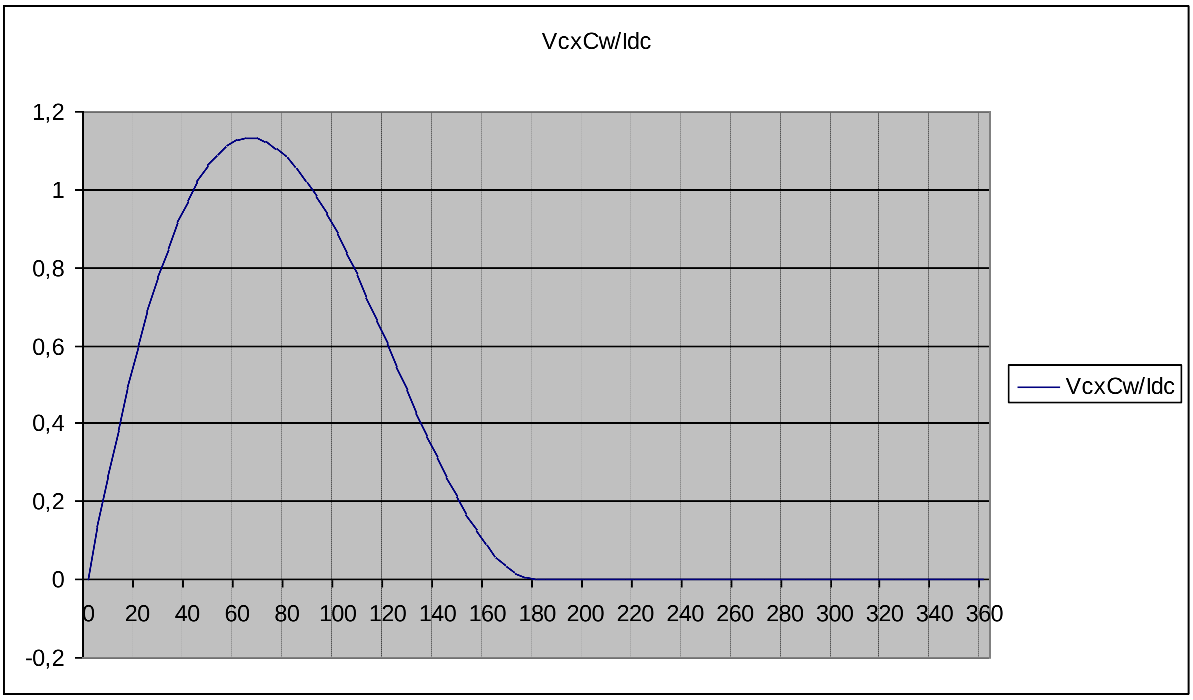

fig x

Het berekenen van A_0 kan nu op verschillende wijze gebeuren.
We kunnen deze curve integreren en de uitkomst delen door 2π vermits $A_0 = 1/2\pi \int f(\vartheta)$,
Maar we wisten al dat V_{cc} = *gemiddelde van* V_c .

Voor de rest delen we de curve in 6 gelijke delen en stellen de volgende vergelijkingen op;

y1- A_0 = A1.sin (π.1/3) + A2.sin (2.π.1/3)+ A3.sin (3.π.1/3) + B1.cos (π.1/3+ B2.cos (2.π.1/3)+ B3.cos (3.π.1/3) (1)
y2- A_0 = A1 sin (π.2/3) + A2.sin (2.π.2/3)+ A3.sin (3.π.2/3) + B1.cos (π.2/3)+ B2.cos (2.π.2/3)+ B3.cos (3.π.2/3) (2)
y3- A_0 = A1 sin (π.3/3) + A2.sin (2.π.3/3)+ A3.sin (3.π.3/3) + B1.cos (π.3/3)+ B2.cos (2.π.3/3)+ B3.cos (3.π.3/3) (3)
Y4- A_0 = A1.sin (π.4/3) + A2.sin (2.π.4/3)+ A3.sin (3.π.4/3) + B1.cos (π.4/3)+ B2.cos (2.π.4/3)+ B3.cos (3.π.4/3) (4)
y2- A_0 = A1 sin (π.5/3) + A2.sin (2.π.5/3)+ A3.sin (3.π.5/3) + B1.cos (π.5/3)+ B2.cos (2.π.5/3)+ B3.cos (3.π.5/3) (5)
y3- A_0 = A1 sin (π.6/3) + A2.sin (2.π.6/3)+ A3.sin (3.π.6/3) + B1.cos (π.6/3)+ B2.cos (2.π.6/3)+ B3.cos (3.π.6/3) (6)

Uit de curve halen we dat

$y_1 = 1.1278$	*op het ogenblik van 360° x 1/6 = 60°*
$y_2 = 0.604$	*op het ogenblik van 360° x 2/6 = 120°*
$y_3 = 0$	*op het ogenblik van 360° x 3/6 = 180°*
$y_4 = 0$	*op het ogenblik van 360° x 4/6 = 240°*
$y_5 = 0$	*op het ogenblik van 360° x 5/6 = 300°*
$y_6 = 0$	*op het ogenblik van 360° x 6/6 = 360°*

1.1278- A_0 = A1.sin (π.1/3) + A2.sin (2.π.1/3)+ A3.sin (3.π.1/3) + B1.cos (π.1/3)+ B2.cos (2.π.1/3)+ B3.cos (3.π.1/3) (1)
0.604 - A_0 = A1 sin (π.2/3) + A2.sin (2.π.2/3)+ A3.sin (3.π.2/3) + B1.cos (π.2/3)+ B2.cos (2.π.2/3)+ B3.cos (3.π.2/3) (2)
0 - A_0 = A1 sin (π.3/3) + A2.sin (2.π.3/3)+ A3.sin (3.π.3/3) + B1.cos (π.3/3)+ B2.cos (2.π.3/3)+ B3.cos (3.π.3/3) (3)
0 - A_0 = A1.sin (π.4/3) + A2.sin (2.π.4/3)+ A3.sin (3.π.4/3) + B1.cos (π.4/3+ B2.cos (2.π.4/3)+ B3.cos (3.π.4/3) (4)
0 - A_0 = A1 sin (π.5/3) + A2.sin (2.π.5/3)+ A3.sin (3.π.5/3) + B1.cos (π.5/3)+ B2.cos (2.π.5/3)+ B3.cos (3.π.5/3) (5)
0 - A_0 = A1 sin (π.6/3) + A2.sin (2.π.6/3)+ A3.sin (3.π.6/3) + B1.cos (π.6/3)+ B2.cos (2.π.6/3)+ B3.cos (3.π.6/3) (6)

vervolgens rekenen we de sinus en cosinus van alle elementen in de matrix;
sin(π.1/3) =0.866;

sin (2 π.1/3) = 0.866;
sin (3 π.1/3) = 0;
cos (π.1/3) =0.5;
cos (2π.1/3) =-0.5;
cos (3π.1/3) = -1;
enz.. voor alle volgende rijen.
We krijgen dan een matrix die er als volgt uitziet;

1.1278- 9 = A1 x 0.866	+ A2 x 0.866	+ A3 x .0	+ B1 x 0.5	- B2.x 0.5	- B3 x 1	(1)
0.604 - 9 = A1 x 0.866	- A2 x 0.866	+ A3. x 0	- B1 x 0.5	- B2 x 0.5	.+ B3.x 1	(2)
0 - 9 = A1 x 0	+ A2.x 0	+ A3. x 0	- B1.x 1	+ B2.x 1	- B3. x 1	(3)
0 - 9 = A1 x 0.866	+ A2 x 0	+ A3 x 0	+ B1 x 0.5	- B2 x 0.5	+ B3 x 1	(4)
0 - 9 = -A1 x 0.866	+ A2 x 0.866	+ A3 x 0	+ B1 x 0.5	- B2 x 0.5	- B3 x 1	(5)
0 - 9 = A1 x 0	+ A2 x 0	+ A3 x 0	+ B1 x 1	+ B2 x 1	+ B3 x 1	(6)

We merken op dat in deze matrix de derde kolom steeds 0 is en dusdanig is de matrix niet op te lossen .Men kan echter deze matrix wel gebruiken door de derde kolom te elimineren ,maar dan hebben we een oplossing voor de 1^{ste}, 2^{de} maar geen oplossing voor A3 ofwel de 3^{de} harmonische.
We kunnen echter de 3^{de} rij vervangen door een ander punt. Bijvoorbeeld door π/2 of 90°.
Met y3 = 1 op het ogenblik van 360° x 1/4 = 90°
Dan wordt onze derde rij hetvolgende;

1 - 9 = A1 sin (2π/4) + A2.sin (2.π.2/4)+ A3.sin (3.π.2/4) + B1.cos (π.2/4)+ B2.cos (2.π.2/4)+ B3.cos (3.π.2/4) (3)

Ofwel;

1 - 9 = A1 x 1 + A2 x 0 - A3.sin x 1 - B1 x 1 + B2 x 0 - B3 x 1 (3)

En onze nieuwe op te lossen matrix wordt dan;

1.1278- 9 = A1 x 0.866	+ A2 x 0.866	+ A3 x .0	+ B1 x 0.5	- B2.x 0.5	- B3 x 1	(1)
0.604 - 9 = A1 x 0.866	- A2 x 0.866	+ A3. x 0	- B1 x 0.5	- B2 x 0.5	.+ B3.x 1	(2)
1 - 9 = A1 x 1	+ A2 x 0	- A3.sin x 1	- B1 x 1	+ B2 x 0	- B3 x 1	(3)
0 - 9 = A1 x 0.866	+ A2 x 0	+ A3 x 0	+ B1 x 0.5	- B2 x 0.5	+ B3 x 1	(4)
0 - 9 = -A1 x 0.866	+ A2 x 0.866	+ A3 x 0	+ B1 x 0.5	- B2 x 0.5	- B3 x 1	(5)
0 - 9 = A1 x 0	+ A2 x 0	+ A3 x 0	+ B1 x 1	+ B2 x 1	+ B3 x 1	(6)

En deze matrix is wel oplosbaar. Met de gewone regel van Cramer vinden we de volgende oplossing;
A1 = A2= A3= B1= B2= B3=

Meestal zijn we maar geinteresseert in de 1^{ste} harmonische (en mischien ook in de onderdrukking van de volgende harmonischen) en de phase verschuiving ten opzichte van het oorspronkelijk signaal.
Merk op dat er in onze matrix veel "0" in voorkomen. Dit moeten we vermijden vermits deze waarden geen bijdragen leveren voor de bijhorende amplitude waarde 'Ax" .Immers wat ook Ax weze Ax. 0 = 0, daarom zal deze matrix niet het verhoopte resultaat geven maar oorzaak zijn van hogere harmonische vervorming. Immers er zijn oneindig aantal curves mogelijk te bedenken die door de verschillende punten gaan maar niet door de niet gedefinieerde tussengelegen punten. Dit alles is duidelijk gemaakt indien we de hierboven gevonden matrix uitrekenen en de functie uitrekenen en in kaart brengen.

4 Discrete Fourier Transform

Een beter methode steunt op de “sampling theory” en is op het Internet uitvoerig beschreven onder andere in https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/an-introduction-to-the-discrete-fourier-transform/

5 Het formele bewijs van de Fourier series.

Fourier kwam dus tot het besluit dat

$$F(x) = Y = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n.\cos(\frac{n.\pi.x}{L}) + B_n.\sin(\frac{n.\pi.x}{L})) \qquad (1)$$

en hierin is

$$A_n = \frac{1}{L}.\int_0^{2L}.F(x).\cos(\frac{n.\pi.x}{L}).dx \qquad (2)$$

en

$$B_n = \frac{1}{L}.\int_0^{2L}.F(x).\sin(\frac{n.\pi.x}{L}).dx \qquad (3)$$

Om dit te bewijzen gaan we als volgt te werk:
We integreren onze formule (1) langs beide kanten als volgt:

$\int_{-L}^{+L} F(x).dx = \int_{-L}^{+L}\frac{A_0}{2}.dx + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\int_{-L}^{+L}\cos(\frac{n.\pi.x}{L}).dx + B_n.\int_{-L}^{+L}\sin(\frac{n.\pi.x}{L}).dx)$ en we bewijzen dat

$\int_{-L}^{+L}\cos(\frac{n.\pi.x}{L}).dx = 0$ (zie eerste bewijs)

$\int_{-L}^{+L}\sin(\frac{n.\pi.x}{L}).dx) = 0$ (zie tweede bewijs)

zodat $\int_{-L}^{+L} F(x).dx = \int_{-L}^{+L}\frac{A_0}{2}.dx = \frac{A_0.2L}{2}$ waaruit volgt dat $A_0 = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{+L} F(x).dx$.

Om de amplitudes A_n met $n = 1,2,3,4...$ gaan we als volgt te werk.

We vermenigvulgien onze formule (1) aan beide kanten met $\cos(\frac{m.\pi.x}{L})$ en integreren beide kanten van de vergelijking, dan wordt de volledige functie als volgt

$$\int_{-L}^{+L} F(x).\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = \int_{-L}^{+L}\frac{A_0}{2}.\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n.\int_{-L}^{+L}\cos(\frac{n.\pi.x}{L}).\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx$$

$$+ B_n\int_{-L}^{+L}\sin(\frac{n.\pi.x}{L}).\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx)$$

En we bewijzen dat al wat achter het gelijkheidsteken staat gelijk is aan $A_m.L$ (zie derde en vierde bewijs) indien $m \neq 0$ dan wordt natuurlijk

$$\int_{-L}^{+L} F(x).\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = A_m.L$$

en hieruit volgt natuurlijk dat

$$A_m = .\frac{1}{L}.\int_{-L}^{+L} F(x).\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx$$

Op analoge manier, om B_n te berekenen, gaan we ook diezelfde functie vermenigvuldigen met $\sin(\frac{m.\pi.x}{L})$ en integreren beide kanten, de formule wordt dan:

$$\int_{-L}^{+L} F(x).\sin(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = \int_{-L}^{+L}\frac{A_0}{2}.\sin(\frac{m.\pi.x}{L}).dx + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n.\int_{-L}^{+L}\cos(\frac{n.\pi.x}{L}).\sin(\frac{m.\pi.x}{L}).dx$$

$$+ B_n\int_{-L}^{+L}\sin(\frac{n.\pi.x}{L}).\sin(\frac{m.\pi.x}{L}).dx)$$

en we bewijzen dat $\int_{-L}^{+L} F(x).\sin(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = B_m.L$ (zie vijfde en zesde bewijs) waaruit natuurlijk volgt dat $B_m = .\frac{1}{L}.\int_{-L}^{+L} F(x).\sin(\frac{m.\pi.x}{L}).dx$.

Eerste bewijs

$$\int_{-L}^{+l}\sin(\frac{n.\pi.x}{L}).dx = -\frac{L}{n.\pi}\cos(\frac{n.\pi.x}{L})\,|_{-L}^{+L} = -\frac{L}{n.\pi}\cos(n.\pi) + \frac{L}{n.\pi}\cos(n.\pi) = 0$$

Tweede bewijs

$$\int_{-L}^{+l}\cos(\frac{n.\pi.x}{L}).dx = \frac{L}{n.\pi}\sin(\frac{n.\pi.x}{L})\,|_{-L}^{+L} = \frac{L}{n.\pi}\sin(n.\pi) - \frac{L}{n.\pi}\sin(n.\pi) = 0$$

Derde bewijs

$\int_{-L}^{+L}\cos(\frac{n.\pi.x}{L}).\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = 0$ als $n \neq m$ en $\int_{-L}^{+L}\cos(\frac{n.\pi.x}{L}).\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = L$ als $n = m$

Om dit aan te tonen vertrekken we van de formules die we op school geleerd hebben namelijk $\cos A.\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$ en dus wordt

$\int_{-L}^{+L}\cos(\frac{n.\pi.x}{L}).\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = \frac{1}{2}.\int_{-L}^{=l}[\cos(\frac{(n-m).\pi.x}{L}) + \cos(\frac{(n+m).\pi.x}{L})]dx = 0$ als $n \neq m$

Maar als $n = m$ dan wordt de formule

$$\int_{-L}^{+L}\cos(\frac{n.\pi.x}{L}).\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = \frac{1}{2}.\int_{-L}^{=l}[\cos(0)+\cos(\frac{(2.n.\pi.x}{L})]dx = \frac{1}{2}.\int_{-L}^{=l}[1+\cos(\frac{(2.n.\pi.x}{L})]dx$$

$$= \frac{1}{2}.2.L + 0 = L$$

vierde bewijs

$\int_{-L}^{+L}\sin(\frac{n.\pi.x}{L}).\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = 0$ als $n \neq m$ maar ook als $n = m$

Om dit aan te tonen vertrekken we van de formules die we op school geleerd hebben namelijk $\sin A.\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A-B)+\sin(A+B)]$ en dus wordt

$\int_{-L}^{+L}\sin(\frac{n.\pi.x}{L}).\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = \frac{1}{2}.\int_{-L}^{=l}[\sin(\frac{(n-m).\pi.x}{L}) + \sin(\frac{(n+m).\pi.x}{L})]dx = 0$ als $n \neq m$

$\int_{-L}^{+L}\sin(\frac{n.\pi.x}{L}).\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = \frac{1}{2}.\int_{-L}^{=l}[\sin(0)+\sin(\frac{2.n.\pi.x}{L})]dx = 0$ ook als $n = m$

vijfde bewijs

$\int_{-L}^{+L}\cos(\frac{n.\pi.x}{L}).\sin(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = \int_{-L}^{+L}\sin(\frac{n.\pi.x}{L}).\cos(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = 0$ wat hetzelfde is als het vierde bewijs.

Zesde bewijs

$\int_{-L}^{+L}\sin(\frac{n.\pi.x}{L}).\sin(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = 0$ voor $n \neq m$ en L voor $n = m$

Om dit aan te tonen vertrekken we van de formules die we op school geleerd hebben namelijk $\sin A.\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$ en dus wordt

$$\int_{-L}^{+L}\sin(\frac{n.\pi.x}{L}).\sin(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = \frac{1}{2}.\int_{-L}^{=l}[\cos(\frac{(n-m).\pi.x}{L})+\cos(\frac{(n+m).\pi.x}{L})]dx = 0 \text{ voor } n \neq m$$

$$\int_{-L}^{+L}\sin(\frac{n.\pi.x}{L}).\sin(\frac{m.\pi.x}{L}).dx = \frac{1}{2}.\int_{-L}^{=l}[\cos(0)+\cos(\frac{2.n.\pi.x}{L})]dx = \frac{1}{2}.\int_{-L}^{=l}[1+\cos(\frac{2.n.\pi.x}{L})]dx = \frac{1}{2}.2.L+0 = L$$